УДК 330.655.1.100

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА МНОГОПРОЛЕТНЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Сухарев В.А., д.т.н., профессор
ЮФ НУБ и П Украины «КАТУ»

В статье разработан новый подход к исследованию проблемы устойчивости сжатого многопролетного стержня при разных условиях закрепления его краев. Решение задачи сведено к отысканию численным методом наименьшего корня сложного трансцендентного уравнения.

Многопролетный шарнирно опертый стержень сжат центрально приложенной силой *P* (рис.1). Пролеты пронумерованы слева направо от 1 до n. Аналогичную нумерацию имеют длины пролетов $l_i\ (i=1,2,3,...,n)$. Разыскивается такое минимальное значение сжимающей силы, при котором возможен переход стержня из прямолинейного равновесного состояния в криволинейное. В дальнейшем эта сила называется критической $P_{кр}$. Кроме шарнирного закрепления краев стержня возможно также жесткое закрепление левого края или обеих краев одновременно.

Главными факторами, которые обусловливают переход стержня в криволинейное состояние, являются изгибающие моменты $M_i\ (i=1,2,3,...,n-1)$ в местах постановки промежуточных опор (рис.1). Кроме этих моментов на рисунке показаны также моменты M_0 , M_nсоответственнона левом и правом краях стержня, причем направления их действия выбраны так, чтобы обеспечивалась возможность равенства нулю углового перемещения в случай жесткого закрепления края. При шарнирном закреплении краев $M_o = M_n$ =0. В системе координатных осей W,z положительными считаются моменты, которые вращают по стрелке часов.

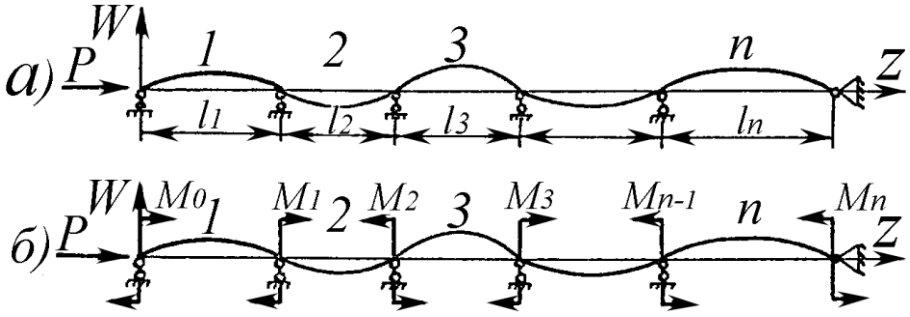

Рис. 1

Принят следующий подход к решению задачи. Предварительно рассматривается вопрос об устойчивости однопролетного стержня, сжатого силой P и нагруженного краевыми моментами. На основе полученного при этом решения в местах стыка соседних пролетов удовлетворяются условия равенства угловых перемещений, в результате чего образуется система (n-1) линейных однородных уравнений относительно неизвестных моментов M_i. Далее решают задачу о собственных значениях этой системы уравнений, приравнивая нулю определитель, составленный из ее коэффициентов. Раскрывая последний, приходят к трансцендентному уравнению, которое содержит в качестве неизвестных собственные значения параметра P. Наименьший корень этого уравнения дает искомое значение силы $P_{кр}$.

На рис.2 изображена схема сжатого однопролетного стержня с краевыми моментами $M_л > 0$ и $M_n > 0$. Введены обозначения: W,V - прогиб и угол поворота сечения стержня; z - текущая координата. Функции W,V связаны между собой зависимостью

$$V(z) = \frac{dW(z)}{dz} \tag{1}$$

В системе координатных осей W,z дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня записывается в виде

$$EI_{min}\frac{d^2W}{dz^2} = -PW + M_л - \frac{M_л}{l}z - \frac{M_n}{l}z \tag{2}$$

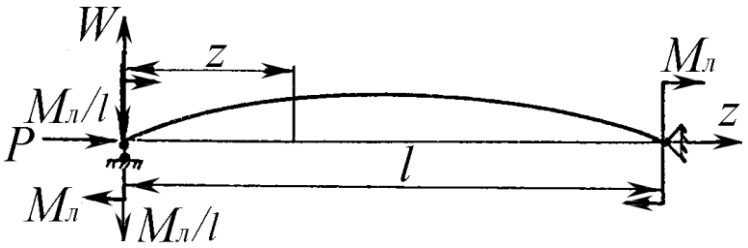

Рис. 2

Здесь через $EI_{\min}$ обозначена минимальная изгибная жесткость стержня, а также принято во внимание, что обусловленные моментами $M_л, M_n$ реакции в левой опоре равняются соответственно $\frac{M_л}{l}, \frac{M_n}{l}$

Введя обозначение

$$K = \sqrt{\frac{P}{EI_{\min}}}, \tag{3}$$

получим в результате интегрирования уравнения (2):

$$W(z) = A\cos kz + B\sin kz + \frac{M_ë}{k^2 EI_{\min}} - \frac{(M_ë + M_n)}{k^2 EI_{\min}} \cdot \frac{z}{l}. \tag{4}$$

$$V(z) = -kA\sin kz + kB\cos kz - \frac{(M_{\ddot{e}} + M_n)}{lk^2 EI_{\min}}. \qquad (5)$$

Константы интегрирования A, B найдем, удовлетворяя решение (4) граничным условиям: $z = 0;\quad W = 0;\quad z = l;\quad W = 0$:

$$A = \frac{-M_{\ddot{e}}}{k^2 EI_{\min}};\qquad B = \frac{1}{\sin kl}\frac{(M_n + M_{\ddot{e}}\cos kl)}{k^2 EI_{\min}}$$

Окончательно для функций W, V имеем:

$$W(z) = \frac{-M_{\ddot{e}}}{kEI_{\min}}\left[(\cos kz - ctg\ kl\sin kz) - \left(1 - \frac{z}{l}\right)\right] +$$
$$+ \frac{M_n}{k^2 EI_{\min}}\left(\frac{\sin kz}{\sin kl} - \frac{z}{l}\right);$$
$$V(z) = \frac{-M_{\ddot{e}}}{kEI_{\min}}\left(\frac{1}{kl} - \sin kz - cgt\ kl\cos kz\right) + \qquad (6)$$
$$+ \frac{M_n}{kEI_{\min}}\left(\frac{\cos kz}{\cos kl} - \frac{1}{kl}\right).$$

Введя обозначения

$$\alpha = kl;\qquad \chi(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha tg\,\alpha};\qquad \omega(\alpha) = \frac{1}{\alpha\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}, \qquad (7)$$

запишем следующие выражения для краевых углов поворота

$$V_{\ddot{e}} = \frac{-M_{\ddot{e}} l}{EI_{\min}}\chi(\alpha) + \frac{M_n l}{EI_{\min}}\omega(\alpha);$$
$$V_n = +\frac{M_{\ddot{e}} l}{EI_{\min}}\omega(\alpha) - \frac{M_n l}{EI_{\min}}\chi(\alpha). \qquad (8)$$

Поскольку функции $\chi(\alpha),\ \omega(\alpha)$ играют фундаментальную роль при исследовании устойчивости сжатых стержней, на рис.3 изображен качественный характер их поведения.

Следует обратить внимание на то, что точки $\alpha = \pi n\ (n = 1,2,3...)$ являются особыми, так как обе функции здесь испытают разрывы второго рода (от $+\infty$ к $-\infty$ или от $-\infty$ к $+\infty$).

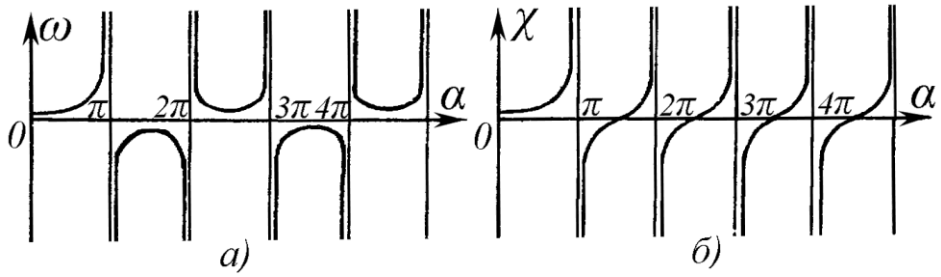

Рис.3

Определим моменты в жестко закрепленной краевой опоре. Для жестко закрепленной левой опоры (рис. 4, а) должно выполняться условие $V_л = 0$. Принимая во внимание первое выражение (8), получим

$$M_o = +\nu_0 \frac{\omega(\alpha_1)}{\chi(\alpha_1)} M_1. \tag{9}$$

Для жестко закрепленной правой опоры (Рис.4, б) справедливо условие $V_n = 0$. С помощью выражения (8) найдем:

$$M_n = +\nu_* \frac{\omega(\alpha_n)}{\chi(\alpha_n)} M_{n-1}, \tag{10}$$

причем здесь $\alpha_1 = kl_1;\ \alpha_n = kl_n.$

$\nu_o, \nu_* = \begin{cases} 0 \\ +1 \end{cases}$ - при шарнирном закреплении левого или правого края стержня

- при жестком закреплении левого или правого края стержня

Рассмотрим частные случаи сжатых стержней.

1. Однопролетный стержень

а) **Шарнирное закрепление** обеих краев (рис. 5, а).

В этом случае $M_л = M_n = 0.$ Из решения (4) и граничных условий вытекает: $\sin kl = 0,$ откуда

$$\alpha = kl = \pi;\ P_{kp} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \tag{11}$$

б) **Жесткое закрепление** левого края и шарнирное закрепление правого края (рис. 5, б). В этом случае $M_л > 0;\quad M_n = 0;\quad V_л = 0;$

Из первого выражения (8) вытекает, что $\chi(\alpha) = 0$ или

$$tg\ kl - kl = 0 \qquad (12)$$

Решая это уравнение, найдем

$$kl = 4{,}4934093 \approx \frac{\pi}{0{,}7};\ P_{kp} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0{,}7l)^2}. \qquad (13)$$

в) Жесткое закрепление обеих краев (Рис. 5,в). В этом случае $M_л > 0;\ M_n < 0;\ V_л = 0;\ V_n = 0.$ Согласно выражениям (8) имеем:

$$-\frac{|M_л|\chi(\alpha)l}{EI_{\min}} - \frac{|M_n|\omega(\alpha)l}{EI_{\min}} = 0;\ \frac{|M_л|\omega(\alpha)l}{EI_{\min}} + \frac{|M_n|\chi(\alpha)l}{EI_{\min}} = 0.$$

Приравнивая нулю определитель, составленный из коэффициентов при $|M_л|,\ |M_n|$, и раскрывая его, получим трансцендентное уравнение: $\chi^2(\alpha) - \omega^2(\alpha) = 0.$

Принимая во внимание обозначения (7), запишем

$$\sin\alpha[2(1-\cos\alpha) - \alpha\sin\alpha] = 0.$$

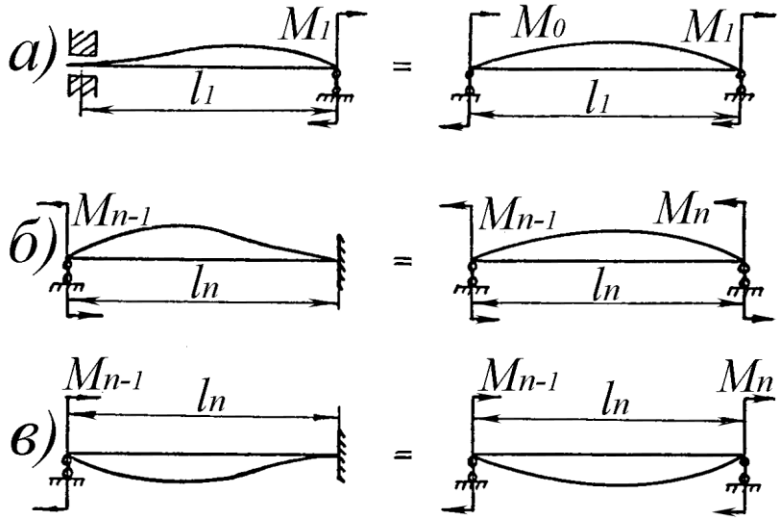

Рис.4

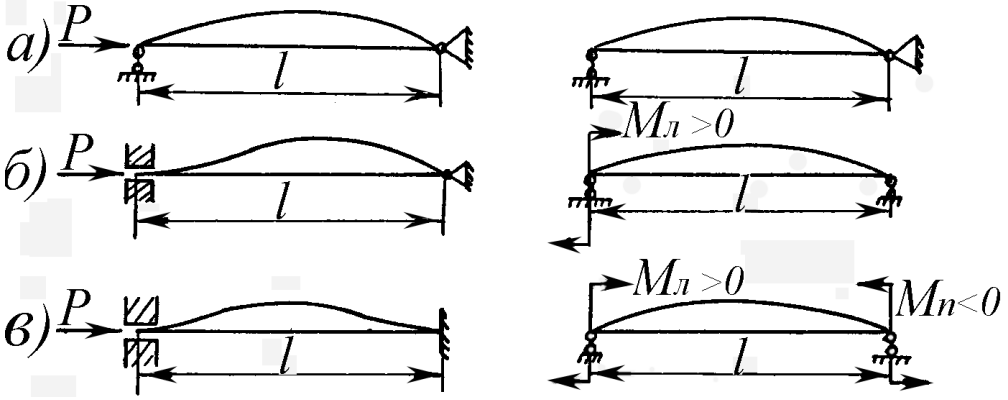

Рис.5

Поскольку условие $\sin\alpha = 0$ данному случаю закрепления краев стержня физически не отвечает, рассматриваем уравнение

$$2(1-\cos\alpha) - \alpha\sin\alpha = 0.$$

Его наименьший корень $\alpha = 2\pi$, следовательно

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0{,}5l)^2} \qquad (14)$$

2. Двухпролетный стержень

На рис. 6,а изображен стержень с жестко закрепленными краями, а на рис.6,б – соответствующий ему эквивалентный стержень с шарнирно закрепленными краями. В рассматриваемом случае $M_o > 0;\ M_1 > 0;\ M_2 > 0.$ В месте стыка пролетов должно выполняться условие совместности деформаций: $V_{1n} = -V_{2л}.$ С учетом соотношений (8) имеем

$$|M_o|\omega(\alpha_1)l_1 - |M_1|\chi(\alpha_1)l_1 = |M_1|\chi(\alpha_2)l_2 - |M_2|\omega(\alpha_2)l_2.$$

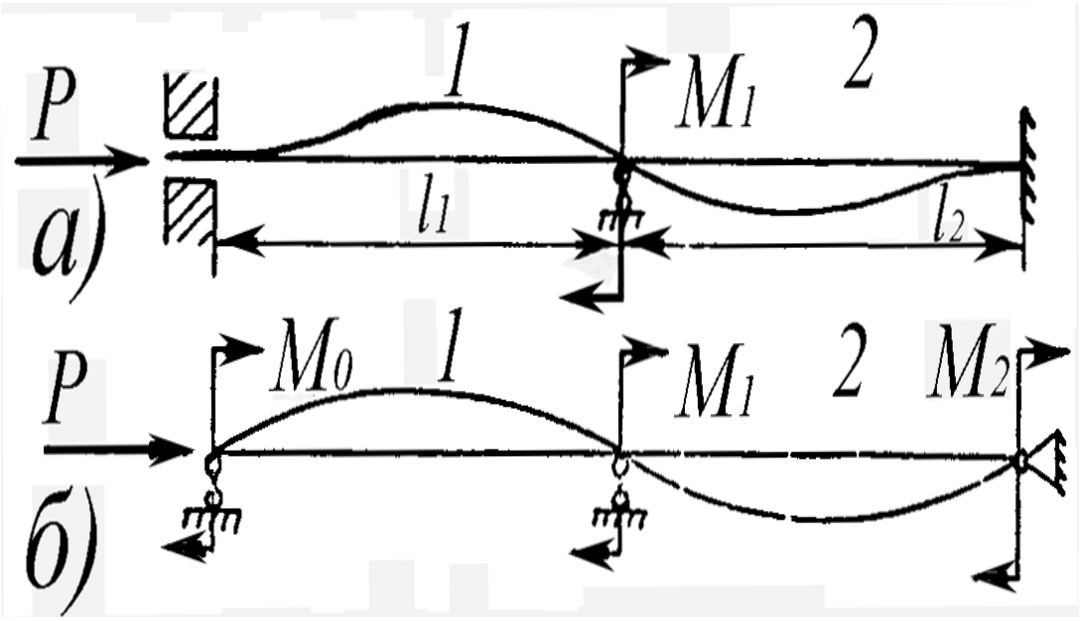

Рис.6

Принимая во внимание зависимости (8), получим трансцендентное уравнение

$$-\nu_o \frac{[\omega(\alpha_1)l_1]^2}{\chi(\alpha_1)l_1} + \chi(\alpha_1)l_1 - \nu_* \frac{[\omega(\alpha_2)l_2]^2}{\chi(\alpha_2)l_2} + \chi(\alpha_2)l_2 = 0. \qquad (15)$$

3. Трехпролетный стержень

На рис. 7, а изображен стержень с жестко закрепленными краями, а на рис.7, б – соответствующий ему стержень с шарнирно закрепленными краями. В рассматриваемом случае $M_o > 0;\ \ M_1 > 0;\ M_2 > 0;\ M_3 < 0.$ В месте стыка пролетов должны выполняться условия: $V_{1n} = -V_{2л};\ V_{2n} = -V_{3л}.$

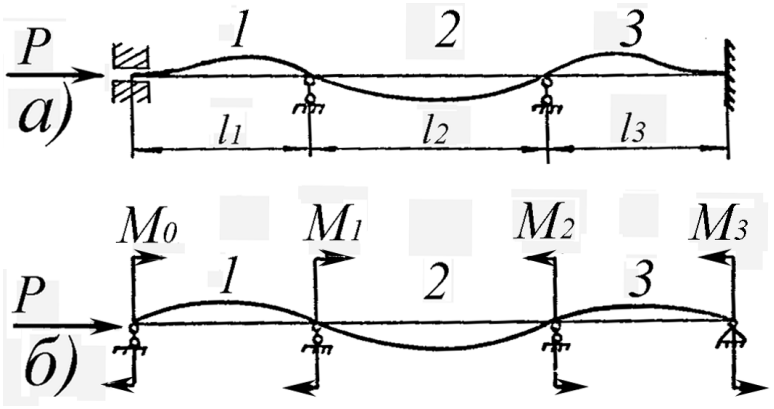

Рис.7

Принимая во внимание зависимости (8), имеем

$$\begin{cases} M_i\omega(\alpha_1)l_1 - M_1\chi(\alpha_1)l_1 = M_1\chi(\alpha_2)l_2 - M_2\omega(\alpha_2)l_2 \\ M_1\omega(\alpha_2)l_2 - M_2\chi(\alpha_2)l_2 = M_2\chi(\alpha_3)l_3 - M_3\omega(\alpha_3)l_3 \end{cases}$$

Учитывая знаки моментов, а также соотношение (9), (11), получим систему однородных уравнений относительно $|M_1|,|M_2|$:

$$\left\{-\nu_o\frac{[\omega(\alpha_1)l_1]^2}{\chi(\alpha_1)l_1} + \chi(\alpha_1)l_1 + \chi(\alpha_2)l_2\right\}|M_1| - \omega(\alpha_2)l_2|M_2| = 0;$$

$$-\omega(\alpha_2)l_2|M_1| + \left\{-\nu_*\frac{[\omega(\alpha_3)l_3]^2}{\chi(\alpha_3)l_3} + \chi(\alpha_3)l_3 + \chi(\alpha_2)l_2\right\}|M_2| = 0.$$

Приравнивая нулю определитель, составленный из коэффициентов этой системы, и раскрывая его, получим трансцендентное уравнение

$$[\omega(\alpha_2)l_2]^2 - \left\{-\nu_o\frac{[\omega(\alpha_1)l_1]^2}{\chi(\alpha_1)l_1} + \chi(\alpha_1)l_1 + \chi(\alpha_2)l_2\right\}\times$$
$$\times\left\{-\nu_*\frac{[\omega(\alpha_3)l_3]^2}{\chi(\alpha_3)l_3} + \chi(\alpha_3)l_3 + \chi(\alpha_2)l_2\right\} = 0. \qquad (16)$$

4. Четырехпролетный стержень

На рис. 8,а изображен стержень с жестко закрепленными краями, а на рис.8, б – эквивалентный ему стержень с шарнирно закрепленными краями. В данном случае $M_o > 0;\ M_1 > 0;\ M_2 < 0;\ M_3 > 0;\ M_4 > 0.$ Условия совместности деформаций: $V_{1n} = -V_{2л};\ V_{2n} = -V_{3л};\ V_{3n} = -V_{4л}.$

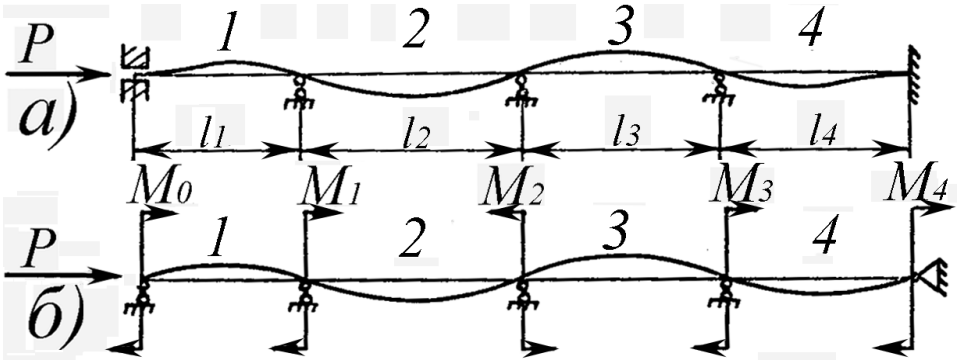

Рис.8

С учетом зависимостей (8) получим

$$\begin{cases} M_i\omega(\alpha_1)l_1 - M_1\chi(\alpha_1)l_1 = M_1\chi(\alpha_2)l_2 - M_2\omega(\alpha_2)l_2; \\ M_1\omega(\alpha_2)l_2 - M_2\chi(\alpha_2)l_2 = M_2\chi(\alpha_3)l_3 - M_3\omega(\alpha_3)l_3; \\ M_2\omega(\alpha_3)l_3 - M_3\chi(\alpha_3)l_3 = M_3\chi(\alpha_4)l_4 - M_4\omega(\alpha_4)l_4. \end{cases}$$

Принимая во внимание знаки моментов, а также соотношения (9), (10), запишем систему однородных уравнений относительно $|M_1|$, $|M_2|$:

$$\left\{-\nu_o\frac{[\omega(\alpha_1)l_1]^2}{\chi(\alpha_1)l_1} + \chi(\alpha_1)l_1 + \chi(\alpha_2)l_2\right\}|M_1| - \omega(\alpha_2)l_2|M_2| = 0;$$

$$-\omega(\alpha_2)l_2|M_1| + \left\{-\frac{[\omega(\alpha_3)l_3]^2}{-\nu_*\dfrac{[\omega(\alpha_4)l_4]^2}{\chi(\alpha_4)l_4} + \chi(\alpha_4)l_4 + \chi(\alpha_3)l_3} + \chi(\alpha_3)l_3 + \chi(\alpha_2)l_2\right\}\times|M_2| = 0.$$

Приравнивая к нулю определитель этой системы и раскрывая его, приходим к такому трансцендентному уравнению:

$$[\omega(\alpha_2)l_2]^2 - \left\{-\nu_o\frac{[\omega(\alpha_1)l_1]^2}{\chi(\alpha_1)l_1} + \chi(\alpha_1)l_1 + \chi(\alpha_2)l_2\right\}\times$$

$$\times\left\{-\frac{[\omega(\alpha_3)l_3]^2}{-\nu_*\dfrac{[\omega(\alpha_4)l_4]^2}{\chi(\alpha_4)l_4} + \chi(\alpha_4)l_4 + \chi(\alpha_3)l_3} + \chi(\alpha_3)l_3 + \chi(\alpha_2)l_2\right\} = 0 \qquad (17)$$

Рассмотрим методику решения уравнений (15), (16), (17). Каждое из них имеет много действительных положительных корней. Для нахождения наименьшего корня предварительно необходимо установить интервал $[K_{n-1}; K_n]$

изменения параметра $K=\frac{\alpha_i}{l_i}=\sqrt{\frac{P_{кр}}{EI_{\min}}}$, внутри которого лежит (и притом единственный) искомый корень.

Поскольку функции $\chi(\alpha_i),\omega(\alpha_i)$ ($i=1,2,3,4$), входящие в уравнения (15), (16), (17), испытают разрывы второго рода в точках $\alpha_i=\pi n$ $(n=1,2,3...)$, целесообразно придерживаться следующих правил при выявлении интервала $[K_{n-1};K_n]$. Сначала найти последовательность точек разрыва функций $\chi(\alpha),\ \omega(\alpha)$: $0;\frac{\pi}{l_1};\frac{\pi}{l_2};\frac{\pi}{l_3};\frac{\pi}{l_4};\frac{2\pi}{l_1};\frac{2\pi}{l_2};\frac{2\pi}{l_3};\frac{2\pi}{l_4}....$

и расположить эти точки в порядке их возрастания: $K_o,K_1,K_2,...K_m$. На втором этапе осуществить расчет левой части f соответствующего уравнения (15), (16), (17) с определенным интервалом Δ в промежутке от $K_o+\varepsilon$ до $K_1-\varepsilon$ (ε - малое число) с целью выявления смены знака функции f. Если на n-м шаге происходит изменение знака f, то зафиксировать последовательные значения аргумента K_{n-1},K_n и функции f_{n-1},f_n. После этого применить метод половинного деления [2] для нахождения уточненного значения корня. Если же на интервале $[K_o;K_1]$ знак функции не изменяется, то перейти к рассмотрению следующего интервала $[K_1+\varepsilon;\ K_2-\varepsilon]$, повторив для него вышеописанную процедуру.

Заметим, что поиск корня на первом этапе необходимо осуществлять очень тщательно, рискуя пропустить корень при неудачном выборе шага Δ.

Пример расчета

Стальной четырехпролетный стержень (Рис.8), имеющий прямоугольное поперечное сечение размерами $h=0{,}15$ *м*, $m=0{,}05$ *м*, жестко закреплен на левом краю, шарнирно – на правом и сжат силой P. Длины пролетов: $l_1=1{,}0$ *м*; $l_2=1{,}3$ *м*; $l_3=1{,}2$ *м*; $l_4=1{,}4$ *м*. Следует найти $P_{кр}$, если $E=2\cdot10^8$ *кН/м*^{2}.

Минимальная изгибная жесткость стержня

$$EI_{\min}=E\frac{hm^3}{12}=2\cdot10^8\cdot\frac{0{,}15\cdot0{,}05^3}{12}=312{,}5\ кНм^2.$$

Решение задачи осуществляется численно с помощью специальной компьютерной программы. Последовательность решения приведена ниже.

Исходные данные

1 В ячейки D6 и D7 укажите тип закрепления стержня: 0 - шарнирное; 1 -

Тип закрепления левого края	**1**
Тип закрепления правого края	**0**

2 Заполните таблицу данными: - минимальная изгибная жесткость **EJmin** [кН*м^2];
- площадь поперечного сечения стержня **F** [м^2].

EJmin	**F**
312,5	7,50E-03

3 В ячейку D19 укажите количество пролетов (1, 2, 3 или 4) и заполните таблицу длин пролетов (в метрах).

Количество пролетов	**4**

L1	**L2**	**L3**	**L4**
1	1,3	1,2	1,4

4 В ячейку D24 укажите приращение delta>0.1 для поиска интервала, содержащего корень.

delta	**0,15**

6 В ячейку D28 введите точность определения корня и нажмите кнопку **Старт**.

Число интервалов расчета	**0,001**

Точки разрыва функций X(alf), W(alf) следующие:

k(1)	0
k(2)	2,243995
k(3)	2,41661
k(4)	2,617994
k(5)	3,141593
k(6)	4,487989
k(7)	4,83322
k(8)	5,235988
k(9)	6,283185
k(10)	6,731984
k(11)	7,249829
k(12)	7,853981
k(13)	9,424778

Интервал, содержащий корень, найден

A=	2,487717
B=	2,477855

КОНЕЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

искомый корень k[1/M]=	2,485252
точность корня EPS=	0,001
критическая сила Pkr[кН]=	1930,149
напряжение SIGMAkr[кН/M^2]=	257353,2

Литература

1. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник //под.редакцией И.А. Биргера, Я.Г. Пановко, т.1. - М.: «Машиностроение», 1968.

2. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. - М.: «Мир», 1982.

Сухарєв В.А. Чисельний метод розрахунку багатопрогонових стержнів на стійкість

У статті розроблено новий підхід до дослідження проблеми стійкості стиснутого багатопрольотні стрижня при різних умовах закріплення його краев.Решеніе задачі зведено до відшукання чисельним методом найменшого кореня складного трансцендентного рівняння.

Sukharev VA.Numerical technique to multispan rods for stability

In the article, a new approach to the problem of stability of compressed multispan rod under different conditions of fixing it kraev.Reshenie problem is reduced to finding numerically the smallest root of a complex transcendental equation.